

第 24 章 联立方程模型

24.1 联立方程模型的结构式与简化式

经济理论常常推导出一组相互联系的方程, 其中一个方程的解释变量是另一方程的被解释变量, 这就是联立方程组。

例 农产品市场均衡模型, 由需求函数、供给函数及市场均衡条件组成, 参见第 10 章。

例 简单的宏观经济模型, 参见第 10 章。

即使我们只关心单个方程，但如果该方程包含内生解释变量，则完整的模型仍然是联立方程组。

由 M 个方程构成的联立方程模型的“结构式”(structural form):

$$\begin{cases} \gamma_{11}y_{t1} + \gamma_{21}y_{t2} + \cdots + \gamma_{M1}y_{tM} + \beta_{11}x_{t1} + \cdots + \beta_{K1}x_{tK} = \varepsilon_{t1} \\ \gamma_{12}y_{t1} + \gamma_{22}y_{t2} + \cdots + \gamma_{M2}y_{tM} + \beta_{12}x_{t1} + \cdots + \beta_{K2}x_{tK} = \varepsilon_{t2} \\ \dots\dots\dots \\ \gamma_{1M}y_{t1} + \gamma_{2M}y_{t2} + \cdots + \gamma_{MM}y_{tM} + \beta_{1M}x_{t1} + \cdots + \beta_{KM}x_{tK} = \varepsilon_{tM} \end{cases}$$

$\{y_{ti}\}$ 为内生变量， $\{x_{tj}\}$ 为外生变量，第一个下标表示第 t 个观测值($t=1, \dots, T$)，第二个下标表示第 i 个内生变量($i=1, \dots, M$)，或第 j 个外生变量($j=1, \dots, K$)。

内生变量的系数为 $\{\gamma_{ik}\}$ ，其第一个下标表示它是第 i 个内生变量的系数，而第二个下标表示它在第 k 个方程中($k=1, \dots, M$)。

外生变量的系数为 $\{\beta_{jk}\}$ ，其第一个下标表示它是第 j 个外生变量的系数，而第二个下标表示它在第 k 个方程中。

结构方程的扰动项为 $\{\varepsilon_{tk}\}$ ，其第一个下标表示第 t 个观测值($t=1, \dots, T$)，而第二个下标表示它在第 k 个方程中。

“完整的方程系统”(complete system of equations)要求，内生变量个数等于方程个数 M 。

将上述方程组写成更简洁的“横排”矩阵形式

$$\begin{aligned}
& \begin{pmatrix} y_{t1} & y_{t2} & \cdots & y_{tM} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} & \cdots & \gamma_{1M} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} & \cdots & \gamma_{2M} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \gamma_{M1} & \gamma_{M2} & \cdots & \gamma_{MM} \end{pmatrix} \\
& + \begin{pmatrix} x_{t1} & x_{t2} & \cdots & x_{tK} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \cdots & \beta_{1M} \\ \beta_{21} & \beta_{22} & \cdots & \beta_{2M} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \beta_{K1} & \beta_{K2} & \cdots & \beta_{KM} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{t1} & \varepsilon_{t2} & \cdots & \varepsilon_{tM} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

用矩阵来表示即

$$\mathbf{y}'_t \boldsymbol{\Gamma} + \mathbf{x}'_t \mathbf{B} = \boldsymbol{\varepsilon}'_t$$

其中，系数矩阵 $\boldsymbol{\Gamma}_{M \times M}$ 与 $\mathbf{B}_{K \times M}$ 的每一列对应于一个方程。

比如，第一个方程为

$$(y_{t1} \quad y_{t2} \quad \cdots \quad y_{tM}) \begin{pmatrix} \gamma_{11} \\ \gamma_{21} \\ \vdots \\ \gamma_{M1} \end{pmatrix} + (x_{t1} \quad x_{t2} \quad \cdots \quad x_{tK}) \begin{pmatrix} \beta_{11} \\ \beta_{21} \\ \vdots \\ \beta_{K1} \end{pmatrix} = \varepsilon_{t1}$$

扰动项 $\boldsymbol{\varepsilon}_t$ 由第 t 期各方程的扰动项所构成。

假设扰动项 $\boldsymbol{\varepsilon}_t$ 满足 $E(\boldsymbol{\varepsilon}_t | \mathbf{x}_t) = \mathbf{0}$ (\mathbf{x}_t 外生)，记其协方差矩阵为，

$$\boldsymbol{\Sigma} \equiv E(\boldsymbol{\varepsilon}_t \boldsymbol{\varepsilon}_t' | \mathbf{x}_t)$$

由于存在内生变量，如果直接用 OLS 估计每一方程，将导致内生性偏差或联立方程偏差，得不到一致估计。

求解联立方程组：

$$\mathbf{y}'_t \boldsymbol{\Gamma} = -\mathbf{x}'_t \mathbf{B} + \boldsymbol{\varepsilon}'_t$$

假设 $\boldsymbol{\Gamma}$ 非退化，两边同时右乘 $\boldsymbol{\Gamma}^{-1}$ ，

$$\mathbf{y}'_t = -\mathbf{x}'_t \mathbf{B} \boldsymbol{\Gamma}^{-1} + \boldsymbol{\varepsilon}'_t \boldsymbol{\Gamma}^{-1}$$

$$\mathbf{y}'_t = \mathbf{x}'_t \boldsymbol{\Pi} + \mathbf{v}'_t$$

此方程称为“简化式” (reduced form)。

其系数矩阵为 $\underbrace{\boldsymbol{\Pi}}_{K \times M} \equiv - \underbrace{\mathbf{B}}_{K \times M} \underbrace{\boldsymbol{\Gamma}^{-1}}_{M \times M}$ ，扰动项为 $\mathbf{v}'_t \equiv \boldsymbol{\varepsilon}'_t \boldsymbol{\Gamma}^{-1}$ ，故 $\mathbf{v}_t \equiv \boldsymbol{\Gamma}^{-1'} \boldsymbol{\varepsilon}_t$ 。

简化式扰动项 v_t 仍与外生变量 \mathbf{x}_t 不相关，因为

$$\mathrm{E}(v_t | \mathbf{x}_t) = \mathrm{E}(\boldsymbol{\Gamma}^{-1'} \boldsymbol{\varepsilon}_t | \mathbf{x}_t) = \boldsymbol{\Gamma}^{-1'} \mathrm{E}(\boldsymbol{\varepsilon}_t | \mathbf{x}_t) = \mathbf{0}$$

v_t 的协方差矩阵为

$$\boldsymbol{\Omega} \equiv \mathrm{E}(v_t v_t' | \mathbf{x}_t) = \mathrm{E}(\boldsymbol{\Gamma}^{-1'} \boldsymbol{\varepsilon}_t \boldsymbol{\varepsilon}_t' \boldsymbol{\Gamma}^{-1} | \mathbf{x}_t) = \boldsymbol{\Gamma}^{-1'} \mathrm{E}(\boldsymbol{\varepsilon}_t \boldsymbol{\varepsilon}_t' | \mathbf{x}_t) \boldsymbol{\Gamma}^{-1} = \boldsymbol{\Gamma}^{-1'} \boldsymbol{\Sigma} \boldsymbol{\Gamma}^{-1}$$

简化式方程的解释变量全部为外生变量 \mathbf{x}_t ，故可用 OLS 得到简化式参数 $\boldsymbol{\Pi}$ 与 $\boldsymbol{\Omega}$ 的一致估计。

但我们最终关心的是结构式参数。

在什么情况下，才能从简化式参数 (Π, Ω) 反推出结构式参数 (Γ, B, Σ) 呢？

这涉及联立方程模型的“识别问题” (problem of identification)。

24.2 联立方程模型的识别

在对模型的总体参数进行估计之前，其参数必须“可识别” (identified)。

如果一个总体参数可识别，则该参数的任意两个不同取值，都会在随机样本中显示出系统差异，即如果样本容量足够大，则应该能够在统计意义上区分这两个不同的参数值。

反之，如果无论多大的样本都区分不开，即由不同参数值的总体产生的观测数据在统计意义上是一样的，则该参数“不可识别”(unidentified)。

例 考虑以下回归模型：

$$y_i = \alpha_1 + \alpha_2 + \beta x_i + \varepsilon_i$$

仅通过样本数据 $\{y_i, x_i\}_{i=1}^n$ 是无法对 α_1 与 α_2 分别进行识别的，但可以识别二者之和 $(\alpha_1 + \alpha_2)$ 。

回到联立方程模型的情形，“可识别”意味着，可以从简化式参数 (Π, Ω) 求出结构式参数 (Γ, B, Σ) 的唯一解(unique solution)。

这两组参数之间的关系如下：

$$\boldsymbol{\Pi} \equiv -\boldsymbol{B}\boldsymbol{\Gamma}^{-1}$$

$$\boldsymbol{\Omega} \equiv \boldsymbol{\Gamma}^{-1'} \boldsymbol{\Sigma} \boldsymbol{\Gamma}^{-1}$$

如果 $\boldsymbol{\Gamma}$ 已知，则可通过 $\boldsymbol{\Pi}$ 与 $\boldsymbol{\Omega}$ 求得 \boldsymbol{B} 与 $\boldsymbol{\Sigma}$ 。但 $\boldsymbol{\Gamma}$ 一般是由未知参数组成的矩阵。

事实上，结构式的参数个数比简化式的参数个数多出 M^2 个。

简化式参数 $(\boldsymbol{\Pi}, \boldsymbol{\Omega})$ 的总个数为 $[K \times M + M(M+1)/2]$ (其中， $\boldsymbol{\Pi}_{K \times M}$ 含 $K \times M$ 个参数，而对称矩阵 $\boldsymbol{\Omega}_{M \times M}$ 含 $M(M+1)/2$ 个参数)；

结构式参数 $(\boldsymbol{\Gamma}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{\Sigma})$ 的总个数为 $\left[M^2 + K \times M + M(M+1)/2\right]$ (其中, $\boldsymbol{\Gamma}_{M \times M}$ 含 M^2 个参数, $\boldsymbol{B}_{K \times M}$ 含 $K \times M$ 个参数, 对称矩阵 $\boldsymbol{\Sigma}$ 含 $M(M+1)/2$ 个参数)。

一般地, 不可能从 $(\boldsymbol{\Pi}, \boldsymbol{\Omega})$ 求出 $(\boldsymbol{\Gamma}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{\Sigma})$ 的唯一解。

如不对结构式参数进行约束, 将不可能从简化式参数得到结构式参数的唯一解。

为识别结构方程, 常对结构参数施加如下约束。

(1) 标准化(normalization): 在每个结构方程中, 可以将一个内生变量视为被解释变量, 并将其系数标准化为 1。

(2) 恒等式(identity): 比如, 供需相等的均衡条件、会计恒等式、定义式。恒等式中每个变量的系数均为已知, 不需要识别或估计。

(3) 排斥约束(exclusion restrictions): 在结构方程中排斥某些内生或外生变量, 这相当于对结构矩阵($\boldsymbol{\Gamma}, \boldsymbol{B}$)施以“零约束”(zero restrictions), 即让($\boldsymbol{\Gamma}, \boldsymbol{B}$)中的某些元素为 0。

(4) 线性约束(linear restriction): 比如, 在理论上可以假设生产函数为规模报酬不变(constant returns to scale), 则资本的产出弹性与劳动力的产出弹性之和为 1。

(5) 对扰动项协方差矩阵的约束(restrictions on the disturbance covariance matrix): 比如, 在某些情况下, 可以假设不同方程的扰动项之间不相关。

实践中最重要的约束方法是“排斥变量”(即零约束)。

对于线性约束, 可通过重新定义变量转化为“排斥变量”约束。

究竟需要多少零约束才可以保证结构方程可识别呢?

不失一般性, 考虑第一个结构方程。

假设在第一个方程中, 内生变量 y_1 的系数已被标准化为 1, 另有 M_1 个内生变量也包括在此方程中, 而其余 M_1^* 个内生变量则被排斥在此方程之外, 故 $1 + M_1 + M_1^* = M$ 。

假设第一个方程包含 K_1 个外生变量, 而其余 K_1^* 个外生变量则被排斥在此方程之外, 故 $K_1 + K_1^* = K$ 。

可识别的必要条件为

$$K_1^* \geq M_1$$

称为“阶条件”(order condition), 即结构方程所排斥的外生变量的个数(K_1^*)应大于或等于该方程所包含的内生解释变量的个数(M_1)。

从工具变量法的角度, 被第一个结构方程排斥的所有外生变量都是有效工具变量, 因为根据外生变量的定义, 它们与扰动项不相关(外生性); 而根据简化式, 内生变量可以表示为外生变量的函数, 故它们与内生解释变量相关(相关性)。

在可识别(即秩条件满足)的情况下, 如果恰好 $K_1^* = M_1$, 则称该结构方程“恰好识别”(just identified), 即工具变量个数正好相等内生解释变量的个数。

如果 $K_1^* > M_1$ ，则称该结构方程“过度识别”(overidentified)，即工具变量个数大于内生解释变量的个数。

24.3 单一方程估计法

估计联立方程组的方法可以分为两类：

“单一方程估计法”(single equation estimation)，也称“有限信息估计法”(limited information estimation)；

“系统估计法”，也称“全信息估计法”(full information estimation)。

1. 普通最小二乘法

对于一种特殊的递归模型(recursive model), 即 $\boldsymbol{\Gamma}$ 为下三角矩阵(lower triangular matrix)而协方差矩阵 $\boldsymbol{\Sigma}$ 为对角矩阵(不同方程之间的扰动项不相关)的情形, OLS 依然是一致的。

以一个三方程的系统为例:

$$\begin{cases} y_1 = \mathbf{x}'\boldsymbol{\beta}_1 & + \varepsilon_1 \\ y_2 = \mathbf{x}'\boldsymbol{\beta}_2 + \gamma_{12}y_1 & + \varepsilon_2 \\ y_3 = \mathbf{x}'\boldsymbol{\beta}_3 + \gamma_{13}y_1 + \gamma_{23}y_2 & + \varepsilon_3 \end{cases}$$

第一个方程不含内生解释变量, 可用 OLS 得到一致估计。

在第二个方程中，唯一的内生解释变量为 y_1 ，且与扰动项不相关：

$$\text{Cov}(y_1, \varepsilon_2) = \text{Cov}(\mathbf{x}'\boldsymbol{\beta}_1 + \varepsilon_1, \varepsilon_2) = \underbrace{\text{Cov}(\mathbf{x}'\boldsymbol{\beta}_1, \varepsilon_2)}_{=0} + \underbrace{\text{Cov}(\varepsilon_1, \varepsilon_2)}_{=0} = 0$$

故可用 OLS 来估计第二个方程。

在第三个方程中，内生解释变量为 (y_1, y_2) ，而且 $\text{Cov}(y_1, \varepsilon_3) = \text{Cov}(y_2, \varepsilon_3) = 0$ ，故也可用 OLS 来估计。

2. 间接最小二乘法

在恰好识别的情况下，可先用 OLS 来一致地估计简化式参数，然后通过结构式参数与简化式参数的关系来求解结构式参数，称为“间接最小二乘法” (Indirect Least Square, 简记 ILS)。

在恰好识别的情况下，**ILS** 是一致的，但却不是最有效率的。

在过度识别的情况下，无法使用 **ILS**。

3. 二阶段最小二乘法

在结构方程可识别的情况下，其排斥的外生变量个数大于或等于包含的内生解释变量个数，而所有排斥的外生变量都是有效工具变量，故可以用工具变量法来估计。

如果结构方程的扰动项满足同方差、无自相关的古典假定，则 (2SLS) 是最有效率的工具变量法，也是最常见的单一方程估计法。

4. 广义矩估计法

在过度识别的情况下，如果结构方程的扰动项存在异方差或自相关，则 GMM 比 2SLS 更有效率。

5. 有限信息最大似然估计法

假定结构方程的扰动项服从正态分布，可使用 MLE 对单一方程进行估计，称为“有限信息最大似然估计法” (Limited Information Maximum Likelihood Estimation, 简记 LIML)。

LIML 与 2SLS 在大样本下是渐近等价的。

如果存在弱工具变量，LIML 比 2SLS 更稳健。

24.4 三阶段最小二乘法

最常见的系统估计法为“三阶段最小二乘法”(Three Stage Least Square, 简记 3SLS)。

在某种意义上, 3SLS 将 2SLS 与 SUR 相结合。

3SLS 的基本步骤如下。

前两步: 对每个方程进行 2SLS 估计。

第三步: 根据前两步的估计, 得到对整个系统的扰动项之协方差矩阵的估计。然后, 据此对整个系统进行 GLS 估计(类似于 SUR 的做法)。具体操作如下。

联立方程模型的第 j 个方程可写为（忽略不在方程中的内生变量与外生变量）：

$$\underbrace{\mathbf{y}_j}_{T \times 1} = \underbrace{\mathbf{Y}_j}_{T \times M_j} \underbrace{\boldsymbol{\gamma}_j}_{M_j \times 1} + \underbrace{\mathbf{X}_j}_{T \times K_j} \underbrace{\boldsymbol{\beta}_j}_{K_j \times 1} + \underbrace{\boldsymbol{\varepsilon}_j}_{T \times 1} \equiv \underbrace{\mathbf{Z}_j}_{T \times (M_j + K_j)} \underbrace{\boldsymbol{\delta}_j}_{(M_j + K_j) \times 1} + \underbrace{\boldsymbol{\varepsilon}_j}_{T \times 1} \quad (j = 1, \dots, M)$$

$$\text{其中, } \mathbf{Z}_j \equiv (\mathbf{Y}_j \ \mathbf{X}_j), \quad \boldsymbol{\delta}_j \equiv \begin{pmatrix} \boldsymbol{\gamma}_j \\ \boldsymbol{\beta}_j \end{pmatrix}.$$

将所有 M 个方程叠放在一起可得

$$\mathbf{y} \equiv \underbrace{\begin{pmatrix} \mathbf{y}_1 \\ \mathbf{y}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{y}_M \end{pmatrix}}_{MT \times 1} = \begin{pmatrix} \mathbf{Z}_1 & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{Z}_2 & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{Z}_M \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{\delta}_1 \\ \boldsymbol{\delta}_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{\delta}_M \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}_1 \\ \boldsymbol{\varepsilon}_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{\varepsilon}_M \end{pmatrix}}_{MT \times 1} \equiv \mathbf{Z}\boldsymbol{\delta} + \boldsymbol{\varepsilon}$$

假设 $E(\boldsymbol{\varepsilon} | \mathbf{X}) = \mathbf{0}$, $E(\boldsymbol{\varepsilon}\boldsymbol{\varepsilon}' | \mathbf{X}) = \boldsymbol{\Sigma} \otimes \mathbf{I}$, 其中 \mathbf{X} 包含整个方程系统中所有的外生变量(都可作为工具变量)。

记 $\hat{\mathbf{Z}}_j \equiv \mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{Z}_j$ 为第 j 个方程解释变量 \mathbf{Z}_j 对所有外生变量(工具变量) \mathbf{X} 进行回归的拟合值(第一阶段回归), 则第 j 个方程的 2SLS 估计量为

$$\hat{\boldsymbol{\delta}}_{j, 2SLS} \equiv (\hat{\mathbf{Z}}_j' \hat{\mathbf{Z}}_j)^{-1} \hat{\mathbf{Z}}_j' \mathbf{y}_j$$

定义 $\hat{\mathbf{Z}} \equiv \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{Z}}_1 & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \hat{\mathbf{Z}}_2 & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \hat{\mathbf{Z}}_M \end{pmatrix},$

可将所有方程的单一方程 2SLS 估计量写在一起：

$$\hat{\boldsymbol{\delta}}_{2\text{SLS}} \equiv \begin{pmatrix} \hat{\boldsymbol{\delta}}_{1, 2\text{SLS}} \\ \hat{\boldsymbol{\delta}}_{2, 2\text{SLS}} \\ \vdots \\ \hat{\boldsymbol{\delta}}_{M, 2\text{SLS}} \end{pmatrix} = (\hat{\mathbf{Z}}'\hat{\mathbf{Z}})^{-1} \hat{\mathbf{Z}}'\mathbf{y}$$

为进行 3SLS 估计，须先得到对协方差矩阵 Σ 的估计值 $\hat{\Sigma}$ 。

记矩阵 $\hat{\Sigma}$ 的 (i, j) 元素为 $\hat{\sigma}_{ij}$ ，利用单一方程 2SLS 估计的残差可得

$$\hat{\sigma}_{ij} = \frac{1}{T} (\mathbf{y}_i - \mathbf{Z}_i \hat{\boldsymbol{\delta}}_{i, 2SLS})' (\mathbf{y}_j - \mathbf{Z}_j \hat{\boldsymbol{\delta}}_{j, 2SLS})$$

类比 SUR，可定义 3SLS 估计量为

$$\hat{\boldsymbol{\delta}}_{3SLS} = \left[\hat{\mathbf{Z}}' (\hat{\Sigma}^{-1} \otimes \mathbf{I}) \hat{\mathbf{Z}} \right]^{-1} \hat{\mathbf{Z}}' (\hat{\Sigma}^{-1} \otimes \mathbf{I}) \mathbf{y}$$

对于 3SLS，也可进行迭代，即用 3SLS 的残差重新估计协方差矩阵 Σ ，然后再使用 GLS，如此反复，直至收敛。

24.5 三阶段最小二乘法的 **Stata** 实例

24.6 结构 **VAR**

Sims (1980)提出 **VAR** 模型，但简化式 **VAR** 的脉冲响应函数依赖于变量次序，而且无法揭示经济结构(变量之间没有当期影响)。

经济学家又试图将结构重新纳入 **VAR** 模型中，允许变量之间存在当期影响，形成“结构 **VAR**”的方法。

考虑如下二元动态联立方程组(忽略常数项):

$$\begin{cases} y_{1t} = -a_{12}y_{2t} + \gamma_{11}y_{1,t-1} + \gamma_{12}y_{2,t-1} + \varepsilon_{1t} \\ y_{2t} = -a_{21}y_{1t} + \gamma_{21}y_{1,t-1} + \gamma_{22}y_{2,t-1} + \varepsilon_{2t} \end{cases}$$

其中, 扰动项的分布满足

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_{1t} \\ \varepsilon_{2t} \end{pmatrix} \sim i.i.d. \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & 0 \\ 0 & \sigma_2^2 \end{pmatrix} \right]$$

此方程组的显著特征是在方程右边的解释变量中包含了当期变量, 即 y_{1t} 的解释变量包括 y_{2t} , 而 y_{2t} 的解释变量也包括 y_{1t} 。

一般认为，方程组来自于经济理论对于经济结构的建模，故称为“结构 VAR” (Structural VAR, 简记 SVAR)。

假设结构方程的扰动项 ε_{1t} 与 ε_{2t} 相互独立，称为“结构新息” (structural innovation)。

例 y_{1t} 为去势(detrended)的实际 GDP 对数， y_{2t} 为去势的名义货币供给对数；则结构新息的假设意味着，对产出的意外冲击 (unexpected shocks to output) 与对货币供给的意外冲击不相关。

例 y_{1t} 为实际 GDP 增长率， y_{2t} 为失业率；则 ε_{1t} 与 ε_{2t} 可分别解释为需求冲击(demand shock)与供给冲击(supply shock)，而需求冲击 (例如消费者偏好变化) 与供给冲击 (例如石油价格波动) 不相关 (Blanchard and Quah, 1989)。

将方程组写为矩阵形式：

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & a_{12} \\ a_{21} & 1 \end{pmatrix}}_{\mathbf{A}} \underbrace{\begin{pmatrix} y_{1t} \\ y_{2t} \end{pmatrix}}_{\mathbf{y}_t} = \underbrace{\begin{pmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} \end{pmatrix}}_{\mathbf{\Gamma}_1} \underbrace{\begin{pmatrix} y_{1,t-1} \\ y_{2,t-1} \end{pmatrix}}_{\mathbf{y}_{t-1}} + \underbrace{\begin{pmatrix} \varepsilon_{1t} \\ \varepsilon_{2t} \end{pmatrix}}_{\boldsymbol{\varepsilon}_t}$$

上式可写为

$$\mathbf{A}\mathbf{y}_t = \mathbf{\Gamma}_1\mathbf{y}_{t-1} + \boldsymbol{\varepsilon}_t$$

其中，矩阵 \mathbf{A} 反映了 y_{1t} 与 y_{2t} 的当期互动，即内生性。

假设矩阵 \mathbf{A} 非退化，在方程两边同时左乘 \mathbf{A}^{-1} ，可得简化式VAR(reduced-form VAR)：

$$\mathbf{y}_t = \mathbf{A}^{-1} \boldsymbol{\Gamma}_1 \mathbf{y}_{t-1} + \mathbf{A}^{-1} \boldsymbol{\varepsilon}_t$$

其中，简化式 VAR 的扰动项 $\mathbf{u}_t \equiv \mathbf{A}^{-1} \boldsymbol{\varepsilon}_t$ 的协方差矩阵为

$$\text{Var}(\mathbf{u}_t) = \text{Var}(\mathbf{A}^{-1} \boldsymbol{\varepsilon}_t) = \mathbf{A}^{-1} \text{Var}(\boldsymbol{\varepsilon}_t) \mathbf{A}^{-1'}$$

其中， $\text{Var}(\boldsymbol{\varepsilon}_t)$ 为对角矩阵； $\text{Var}(\mathbf{u}_t)$ 不是对角矩阵，包含 3 个参数。

方程可识别的必要条件(阶条件)是，结构 VAR 的待估参数个数小于或等于简化 VAR 的待估参数个数。

在本例中, SVAR 的待估参数为 8 个(6 个系数, 2 个方差), 而 VAR 的待估参数为 7 个(4 个系数, 3 个协方差)。

为了识别此 SVAR, 至少需要对方程施加一个约束, 比如 $a_{12} = 0$ (意味着 y_{2t} 对 y_{1t} 无直接影响)。

考虑一般形式的 SVAR。从 p 阶简化 VAR 出发:

$$\mathbf{y}_t = \boldsymbol{\Gamma}_1 \mathbf{y}_{t-1} + \cdots + \boldsymbol{\Gamma}_p \mathbf{y}_{t-p} + \mathbf{u}_t$$

其中, \mathbf{y}_t 为 $M \times 1$ 向量; \mathbf{u}_t 为简化式扰动项, 允许存在同期相关 (contemporaneous correlation)。

在方程两边同时左乘某非退化矩阵 A ：

$$A\mathbf{y}_t = A\boldsymbol{\Gamma}_1\mathbf{y}_{t-1} + \cdots + A\boldsymbol{\Gamma}_p\mathbf{y}_{t-p} + A\mathbf{u}_t$$

经移项整理可得：

$$A(\mathbf{I} - \boldsymbol{\Gamma}_1L - \cdots - \boldsymbol{\Gamma}_pL^p)\mathbf{y}_t = A\mathbf{u}_t$$

我们希望 SVAR 的扰动项正交。

一种简单的作法为令 $A\mathbf{u}_t = \boldsymbol{\varepsilon}_t$ ，其中 $\boldsymbol{\varepsilon}_t$ 为 SVAR 的结构扰动项，不存在同期相关。

但此假定可能过强(矩阵 A 来自经济理论对经济结构的建模, 未必能使 Au_t 同期不相关)。

一般地, 假设 $Au_t = B\varepsilon_t$, 其中 B 为 $M \times M$ 矩阵; 则方程可写为

$$A(I - \Gamma_1 L - \cdots - \Gamma_p L^p)y_t = Au_t = B\varepsilon_t$$

结构扰动项 ε_t 的协方差矩阵被标准化为单位矩阵 I_M 。

此方程称为 SVAR 的“AB 模型”(AB-Model)(Amisano and Giannini, 1997)。

对于传统的联立方程模型，分析的重点在于解释变量的边际效应，故一般不要求结构扰动项正交。

对于 **AB** 模型，分析的重点在于正交化冲击的效应，故一般假设结构扰动项 $\boldsymbol{\varepsilon}_t$ 正交。

如果令 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{I}_M$ ，则为 **B** 模型。如果令 $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{I}_M$ ，则为 **A** 模型。**A** 模型与 **B** 模型都是 **AB** 模型的特例。

在方程两边同时左乘 \boldsymbol{A}^{-1} ，可得简化 VAR：

$$\boldsymbol{y}_t = \boldsymbol{\Gamma}_1 \boldsymbol{y}_{t-1} + \cdots + \boldsymbol{\Gamma}_p \boldsymbol{y}_{t-p} + \underbrace{\boldsymbol{A}^{-1} \boldsymbol{B} \boldsymbol{\varepsilon}_t}_{\boldsymbol{u}_t}$$

由于 $\mathbf{u}_t = \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B} \boldsymbol{\varepsilon}_t$ ，故简化式扰动项 \mathbf{u}_t 的协方差矩阵为

$$\text{Var}(\mathbf{u}_t) = \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B} \mathbf{B}' \mathbf{A}^{-1'}$$

结构 VAR 模型的待估参数总数为“ $M^2(\mathbf{A}$ 的参数个数) + $M^2(\mathbf{B}$ 的参数个数) + $pM^2(\boldsymbol{\Gamma}_1, \dots, \boldsymbol{\Gamma}_p$ 的参数个数)”，即 $2M^2 + pM^2$ 。

简化 VAR 模型的待估参数总数为“ $M(M+1)/2(\text{Var}(\mathbf{u}_t)$ 的参数个数) + $pM^2(\boldsymbol{\Gamma}_1, \dots, \boldsymbol{\Gamma}_p$ 的参数个数)”，即 $[M(M+1)/2] + pM^2$ 。

一般地，SVAR 的参数比 VAR 的参数多 $[2M^2 - M(M+1)/2]$ 个。

为识别 AB 模型，需对矩阵 \mathbf{A} 与 \mathbf{B} 施加 $[2M^2 - M(M+1)/2]$ 个约束。

即使将矩阵 A 的主对角线元素都标准化为 1，还需附加 $[2M^2 - M - M(M + 1)/2]$ 个约束条件。

如果正好施加如此多约束，为恰好识别；

如施加更多约束，为过度识别。

此阶条件(order condition)为识别 AB 模型的必要条件。

为估计 SVAR 模型，一般假设结构扰动项 ε_t 服从多维正态分布，即 $\varepsilon_t \sim N(0, I_M)$ ，然后进行带约束条件的 MLE。

虽然此 MLE 估计量在多维正态的假设下导出，但在更弱的条件下，QMLE 估计量依然一致。

一般来说，应从经济理论或对简化式 VAR 的估计结果出发，来设置约束条件。

较常用的方法沿用乔利斯基分解的思路，将矩阵 \mathbf{A} 设为下三角矩阵且主对角线元素全部为 1，并将矩阵 \mathbf{B} 设为对角矩阵，称为“乔利斯基约束” (Cholesky restrictions)。

以 $M = 3$ 为例，约束条件可写为

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \cdot & 1 & 0 \\ \cdot & \cdot & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} \cdot & 0 & 0 \\ 0 & \cdot & 0 \\ 0 & 0 & \cdot \end{pmatrix}$$

其中，缺失值 “.” 表示自由参数(即没有约束)。

从矩阵 A 的第一行可以看出, y_{2t} 与 y_{3t} 对 y_{1t} 无直接影响。

从矩阵 A 的第二行可看出, y_{1t} 对 y_{2t} 有直接影响, 但 y_{3t} 对 y_{2t} 无直接影响。

从矩阵 A 的第三行可看出, y_{1t} 与 y_{2t} 对 y_{3t} 都有直接影响。

使用乔利斯基约束来识别 **SVAR**, 其估计结果依赖于变量次序。

对于所选择的特定变量次序, 需要从理论上进行说明; 或进行敏感度分析, 即变换变量次序, 并对比结果。

针对矩阵 A 与 B 所施加的约束也称为“短期约束” (short-run restrictions), 其 SVAR 模型称为“短期 SVAR” (short-run SVAR)。

另一类约束为“长期约束” (long-run restrictions), 即对结构冲击 ε_t 对于 y_t 的长期效应进行约束, 由 Blanchard and Quah (1989) 所首倡; 其 SVAR 模型称为“长期 SVAR” (long-run SVAR)。

例 根据货币中性假说 (money neutrality hypothesis), 货币在长期内是中性的, 即货币供给在长期内对于实际产出的累积影响为零。

从简化式 VAR 出发, 可推导出 SVAR 模型的脉冲响应函数。

根据与第 20 章类似的推导，结构冲击 $\boldsymbol{\varepsilon}_t$ 对 \boldsymbol{y}_t 的长期效应为

$$\boldsymbol{C} \equiv (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{\Gamma}_1 - \cdots - \boldsymbol{\Gamma}_p)^{-1} \boldsymbol{A}^{-1} \boldsymbol{B}$$

在长期内，可将 SVAR 模型简洁地写为

$$\boldsymbol{y}_t = \boldsymbol{C} \boldsymbol{\varepsilon}_t$$

例 假设 $M = 2$ ，第一个变量为实际 GDP，第二个变量为货币供给；则可约束长期效应矩阵 \boldsymbol{C} 的 (1, 2) 元素为 0，即对第二个变量(货币供给)的结构冲击在长期内对第一个变量(实际 GDP)无作用。